# Especificação, Modelação e Projecto de Sistemas Embutidos

## Petri Nets

Paulo Pedreiras

pbrp@ua.pt

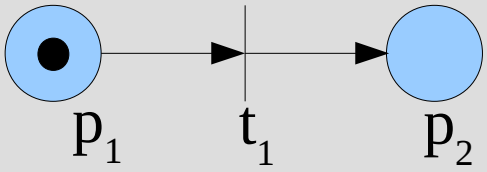
Departamento de Electrónica, Telecomunicações e Informática
Universidade de Aveiro

Parcialmente baseado no livro “Modeling Embedded Systems and SOCs: concurrency and time in models of computation
Axel Jantsch, Morgan Kaufmann Series in “Systems on Silicon”

**V1.0 Novembro/2008**

# Redes de Petri: introdução

- Introduzidas em 1962 por Carl Adam Petri (tese de PhD)



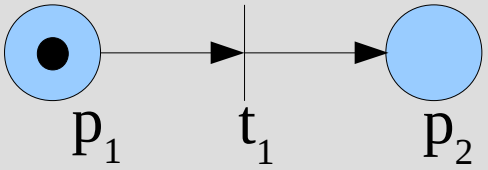

- Foco na **modelação de concorrência**
- Foco no **acto de comunicar** e não nos dados comunicados
- **Comunicação** modelada por um **token** que **não contem dados**
- Todos os comportamentos que **não contribuam** para a **emissão** ou **consumo** de ***tokens*** são **omitidos** do modelo
- A **concorrência** pode ser estudada na sua **forma** mais **pura**

# Petri Nets: Definição

**Def.:** Uma rede de Petri *N é* definida como $N=(P,T,A,w,\underline{x}_0)$, em que:

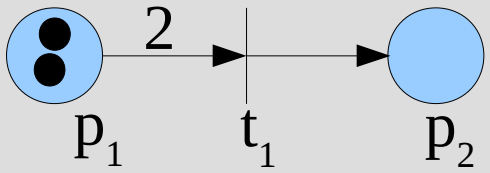
- **P** – Conjunto finito de lugares (*places*)
- ***T*** – Conjunto finito de transições *(transitions)*
- **A** – Conjunto de arcos/ramos (*arcs*)
  - $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$
- **w** - função de peso (*weight function*)
  - $w: A \rightarrow \mathbb{N}$
- $\underline{x}_0$ – vector de marcação inicial (*initial marking vector*), equivalente à noção de estado inicial em máquinas de estados
  - $\underline{x}_0 \in \mathbb{N}^{|P|}$

# Petri Nets: Exemplo




- Rede de Petri com dois lugares $\{p_1,p_2\}$ e uma transição $\{t_1\}$
  - As ***tokens* movem-se** de um lugar para outro por meio das **transições**
  - Cada transição "**consome**" w *tokens* quando dispara
    - Valor indicado por um número junto ao arco (1 se omitido)
  - A **marcação $\underline{x}$** indica quantos *tokens* estão em cada lugar
    - No exemplo temos $\underline{x}=[x(p_1),x(p_2)]=[1,0]$

# Petri Nets: transição permitida




**Def.** Seja a rede de Petri ***N*=(P,T,A,w,$\underline{x}_0$)**.

- I(t)={p ∈ P | (p,t) ∈ A} é o conjunto de **lugares de entrada** da transição t
- O(t)={p ∈ P | (t,p) ∈ A} é o conjunto de **lugares de saída** da transição t

Uma transição "**t**" está no estado **permitido** (***enabled***) se **x(p)≥w(p,t) ∀p∈I(t)**

- De uma forma informal diz-se que **transição é permitida** se cada um dos seus **lugares de entrada** tem **pelo menos tantos *tokens*** quantos o **peso** do respectivo **arco**.
  - **No exemplo da figura a transição $t_1$ é permitida**

# Petri Nets: função de transição

**Def.** Seja a rede de Petri $N=(P,T,A,w,\underline{x}_0)$, com $P=\{p_0, ...,p_{n-1}\}$ lugares e $\underline{x}=[x(p_0), ..., x(p_{n-1})]$ a respectiva marcação.

- A **função de transição** $G:(\mathbb{N}^{|n|} \times T)\rightarrow\mathbb{N}^{|n|}$ define-se como

$$G(\underline{x},t)=\begin{cases}\underline{x}' & \text{se } x(p)\geq w(p,t)\ \forall p\in I(t)\\ \underline{x} & \text{caso contrário}\end{cases}$$

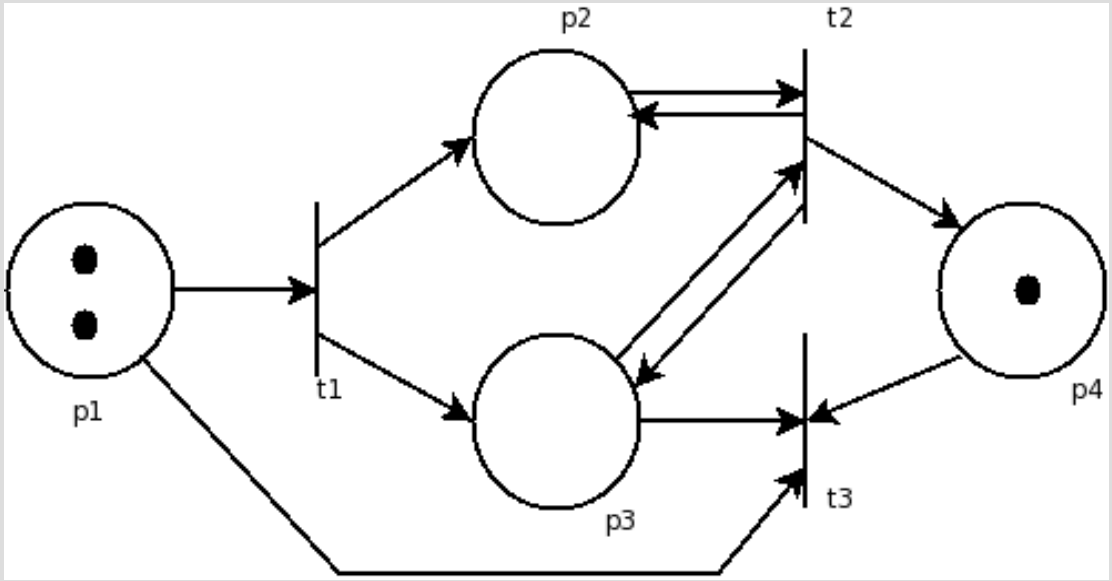
com $x'(p_i)=x(p_i)-w(p_i,t)+w(t,p_i)$, para $0\leq i\leq n$

**Informalmente:**

- Se uma transição não é possível a marcação não se altera
- Quando uma **transição** t (permitida) é "**disparada**":
  i. O número de *tokens* em cada **$p\in I(t)$** é **reduzida** de **$w(p,t)$**
  ii. O número de *tokens* em cada **$p\in O(t)$** é **aumentada** de **$w(t,p)$**

# Petri Nets: função de transição

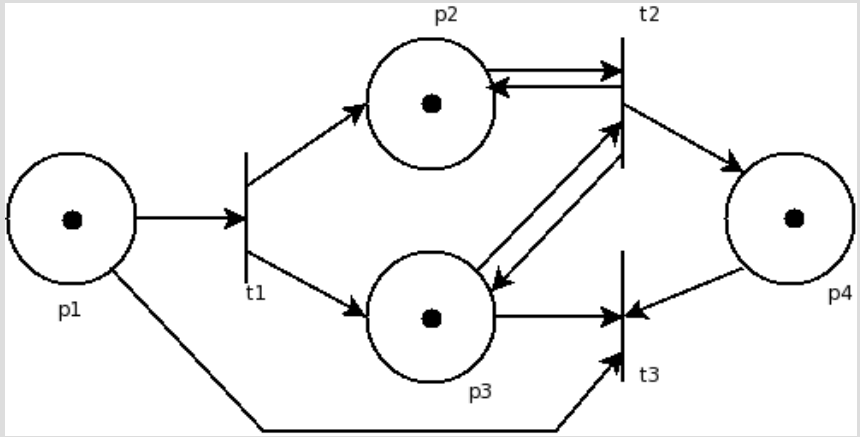
- **Eg.** Considere a rede de Petri ***N*=(P,T,A,w,$\underline{x}_0$),** com:
  - $P=\{p_1, ...,p_4\}$ , $T=\{t_1,t_2,t_3\}$,
  - $A=\{(p_1,t_1),(p_1,t_3),(p_2,t_2),(p_3,t_2),(p_3,t_3),(p_4,t_3),(t_1,p_2),(t_1,p_3),(t_2,p_2),(t_2,p_3),(t_2,p_4)\}$,
  - $w(a)=1 \ \forall \ a \in A$,
  - $x0=[2,0,0,1]$




  - Quais as transições permitidas?

# Petri Nets: função de transição

- **E.g. (cont):** ... Após o disparo de $t_1$




$X_0=[2,0,0,1]$

$\downarrow$

$X_1=[1,1,1,1]$

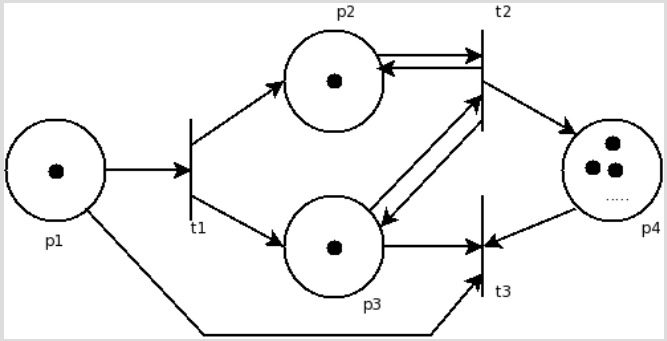
Agora t1,t2 e t3 são permitidas! Qual(is) dela(s) deve(m) disparar?

A semântica das Petri Nets não o define!
Assim, **as PN são inerentemente não determinísticas**!

# Petri Nets: função de transição

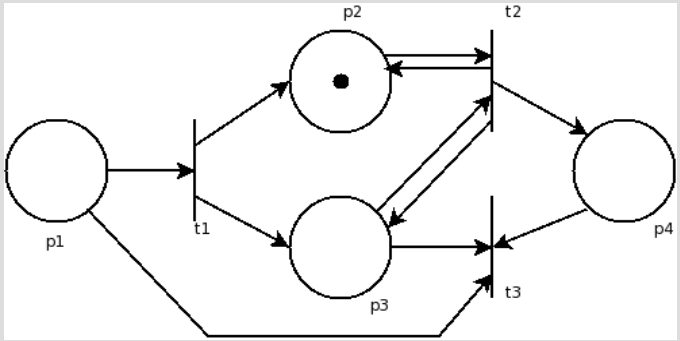
- **E.g. (cont):** Duas possibilidades:

i) **t2 pode disparar arbitrariamente**, acumulando tokens em p4, ou




$\underline{x}_0=[2,0,0,1]$
↓ (t1)
$\underline{x}_1=[1,1,1,1]$
... (t2)
$\underline{x}_n=[1,1,1,n]$
... (t2)

ii) **t3 dispara**, levando ao estado $x_2=[0,1,0,0]$ em que não há transições permitidas




$\underline{x}_0=[2,0,0,1]$
↓ (t1)
$\underline{x}_1=[1,1,1,1]$
↓ (t3)
$\underline{x}_2=[0,1,0,0]$

# Petri Nets: Conjunto de Alcançabilidade (*Reachability set*)

**Def. "Alcançabilidade"** (*Reachability*)

- Para a PN $N=(P,T,A,w,\underline{x}_0)$ e um dado estado $\underline{x}$, um estado $\underline{y}$ diz-se **imediatamente alcançável** a partir de $\underline{x}$ se existe uma transição $t \in T$ tal que $G(\underline{x},t)=\underline{y}$.
- O **conjunto de alcançabilidade** $R(\underline{x})$ é o menor conjunto de estados definidos por:
  i. $\underline{x} \in R(\underline{x})$
  ii. Se $\underline{y} \in R(\underline{x})$ e $\underline{z}=G(\underline{y},t)$ para algum $t \in T$, então $\underline{z} \in R(x)$.

Informalmente, o conjunto de alcançabilidade de um estado inclui **todos os estados** que **possam** eventualmente ser **atingidos disparando** repetidamente **transições**

# Petri Nets: Matriz de incidência

**Def.** Seja a rede de Petri $N=(P,T,A,w,\underline{x}_0)$, com $P=\{p_1, ...,p_n\}$ e $T=\{t_1,...,t_m\}$.

- O **vector de disparo u**=[0,...,0,1,0,...,0] é o vector de dimensão m em que $1 \geq j \geq m$ corresponde à transição $t_j$. Todas as entradas do vector excepto uma são zero.
- A **matriz de incidência A** é uma matriz m*n cuja entrada (j,i) é $a_{j,i}=w(t_j,p_i)-w(p_i,t_j)$

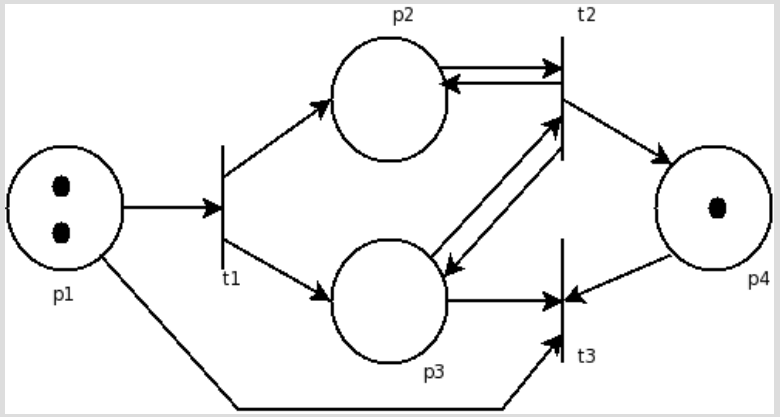
A matriz de incidência contem informação acerca do efeito liquido de disparar a transição $t_j$ no lugar $p_i$. A matriz de incidência permite **calcular a evolução de uma rede de Petri,** por meio da denominada **equação de estado**

$$\underline{x}'=\underline{x}+\underline{u}.A$$

# Petri Nets: Uso da matriz de incidência

- **E.g.** Considere o exemplo apresentado no slide 7

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$ t1 dispara




$\underline{x}_0=[2,0,0,1]$

$\underline{u}_1=[1,0,0]$, $\underline{u}_2=[0,1,0]$,$\underline{u}_3=[0,0,1]$

- **Passo 1.** $\underline{t}_1$ dispara:

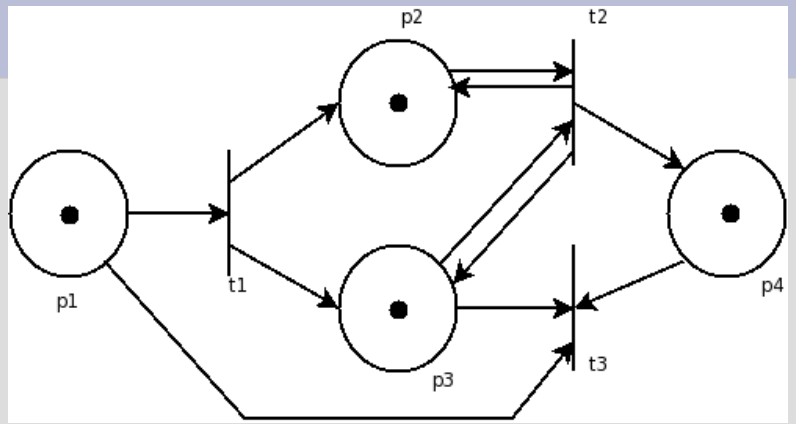
$$x_1=x_0+u_1.\boldsymbol{A} = [2,0,0,1]+[1,0,0]*\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=[2,0,0,1]+[-1,1,1,0]=[1,1,1,1]$$

que é o mesmo resultado obtido por análise gráfica!

# Petri Nets: Uso da matriz de incidência

**E.g.** (cont).




- **Passo 2.** $t_3$ dispara:

$$\underline{x}_2=\underline{x}_1+\underline{u}_2.\boldsymbol{A} = [1,1,1,1] + [0,0,1]*\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=[1,1,1,1]+[-1,0,-1,-1]=[0,1,0,0]$$

- **Passo 3.** t3 dispara novamente:

$$\underline{x}_3=\underline{x}_2+\underline{u}_2.\boldsymbol{A} = [0,1,0,0] + [0,0,1]*\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

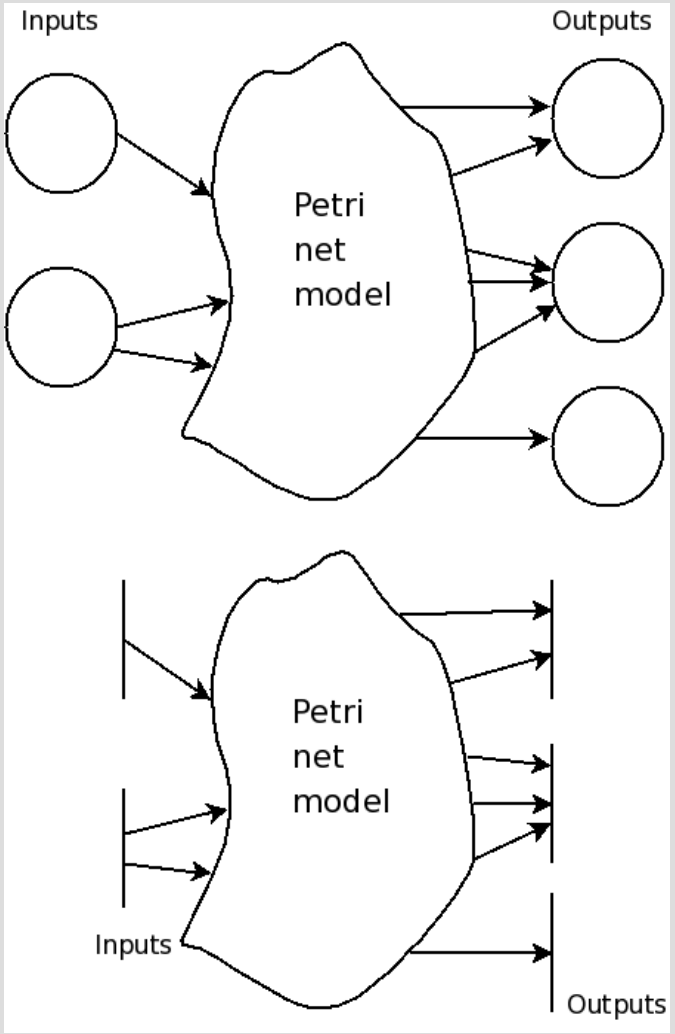
$$=[0,1,0,0]+[-1,0,-1,-1]=[-1,1,-1,-1]$$

Vector de estado com valores negativos!!
Transições inválidas!

# Petri Nets: Modelação de entradas e saídas

## Modelação explícita de I/O

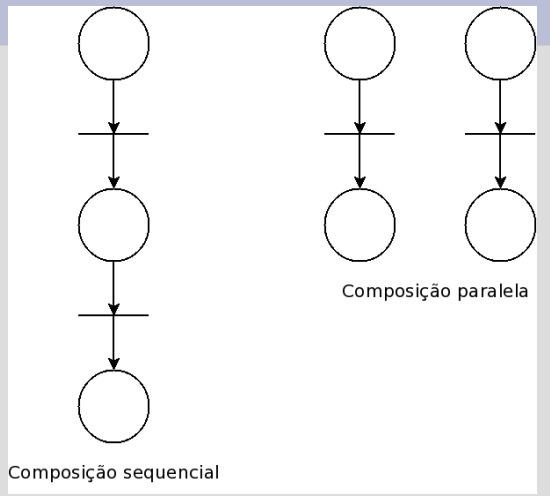
- **Como lugares sem ramos** de entrada (inputs) e lugares sem ramos de saída (outputs)
  - Presume-se que o "ambiente" coloca *tokens* nos lugares de entrada e os consome dos lugares de saída
- **Como transições**
  - O ambiente controla quando e quais as transições de entrada que devem disparar, e consome os *tokens* emitidos pelas transições de saída



# Templates para casos-padrão

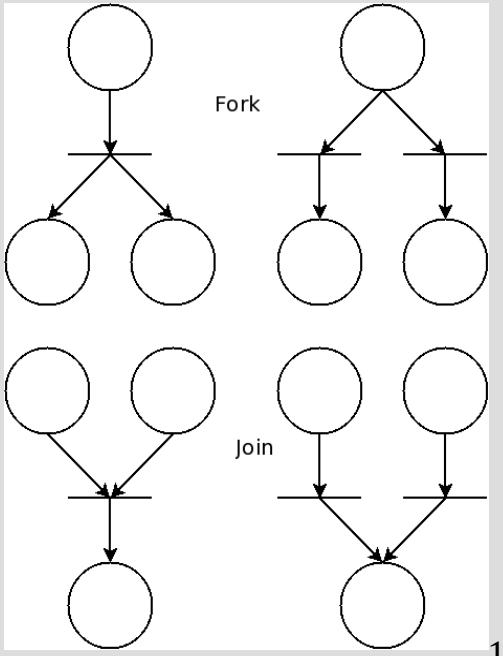
## **Composição** de duas redes

- A combinação de duas redes pode ser:
  - Composição **sequencial:**
    - Uma rede tem de produzir *tokens* consumidos pela outra rede
  - Composição em **paralelo:**
    - Transições podem ocorrer em paralelo (desde que haja *tokens* disponíveis)



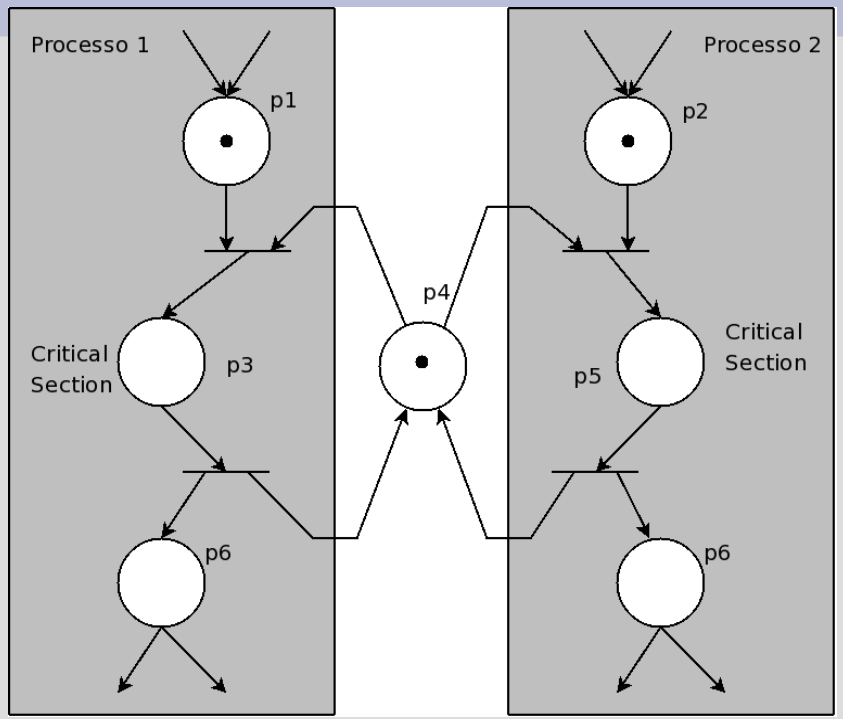

## **Fork** e **Join**

- Divisão e agrupamento de fluxos de controlo



# Templates para casos-padrão

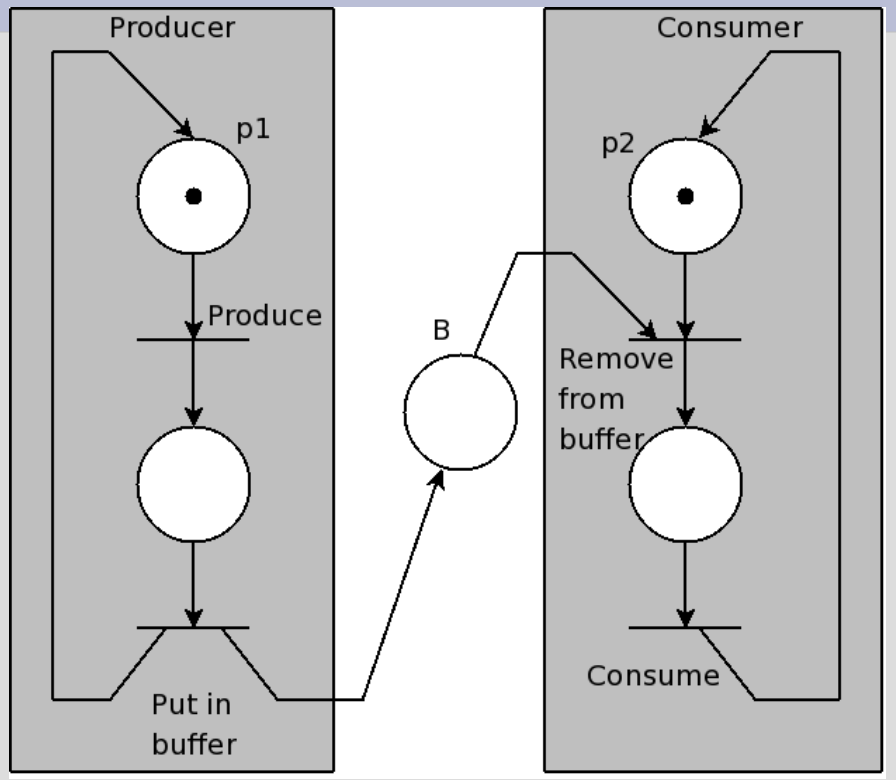
## Exclusão mútua




- Os dois processos **não** entram em **simultâneo** na região critica;
- Facilmente generalizável a um **número arbitrário de processos**
- Permite também **limitar a k** o número de processos que podem **usar** um certo **recurso**
  - k é a marcação inicial de p4

# Templates para casos-padrão

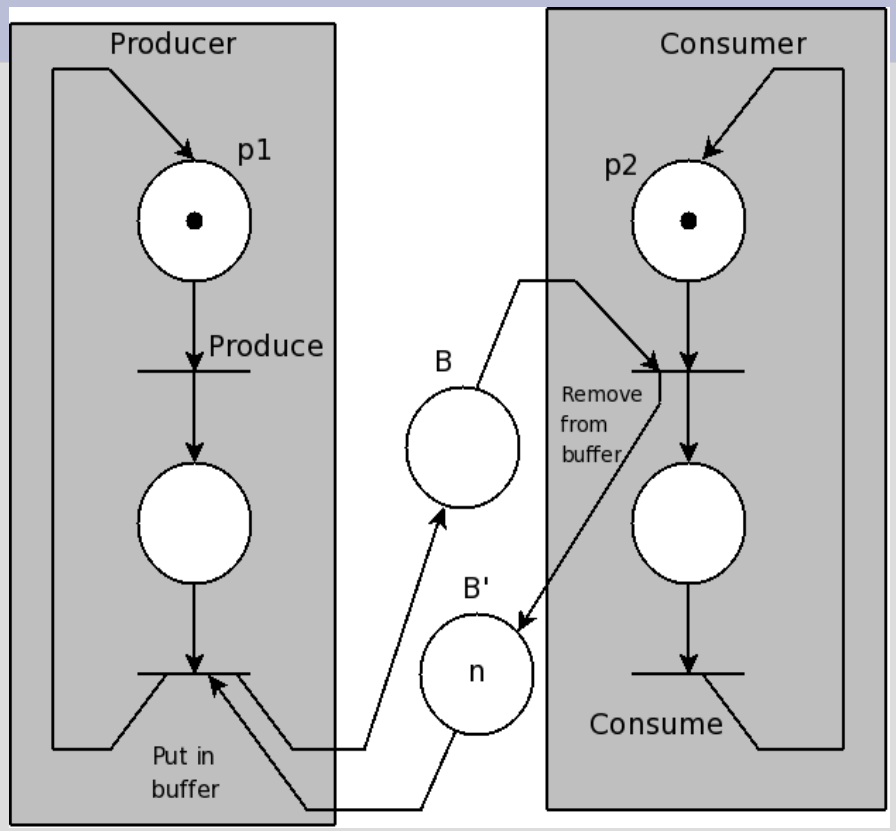
## Produtor/Consumidor (1)




- O **produtor coloca** dados num ***buffer*** e o **consumidor** posteriormente **lê** os dados do mesmo *buffer*
- Calculando o número máximo de *tokens* que podem aparecer em B é possível **calcular** a **dimensão** máxima do ***buffer*** de dados

# Templates para casos-padrão

## Produtor/Consumidor (2)
## *buffer* finito




- Com uma pequena modificação é possível **condicionar** a **activação** do **produtor** à **disponibilidade** de espaço no *buffer*
- **Inicializa-se** o lugar *B'* com o ***n* tokens**, em que *n* corresponde à **dimensão** máxima do *buffer*

# Métodos de análise para redes de Petri

A **modelação** de sistemas tem por **objectivo geral** responder a perguntas como:

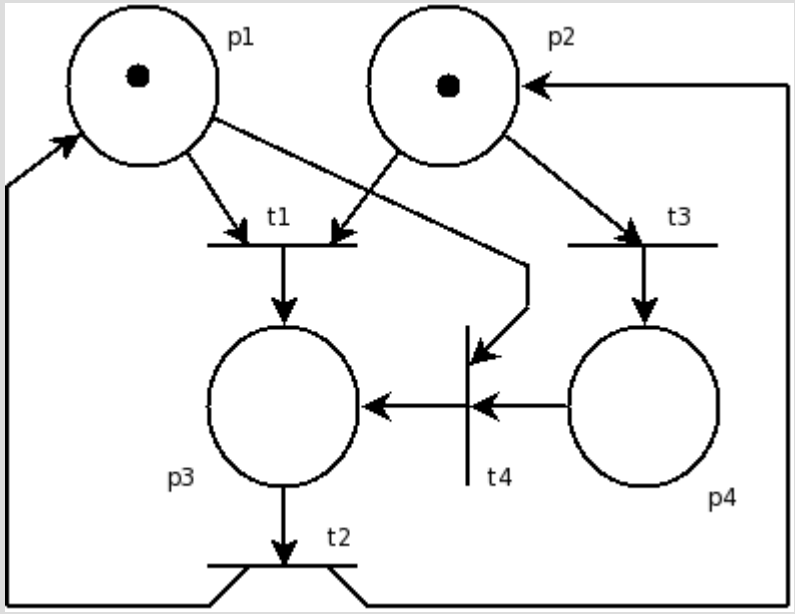
- **Irá** o sistema alguma vez entrar num certo **estado particular**?
- Será o sistema sempre capaz de **evitar** certos **estados "perigosos"** ?
- Será o sistema sempre capaz de **reagir** a *inputs*?
- Será que o sistema alguma vez **alcançará** um certo estado desejado?

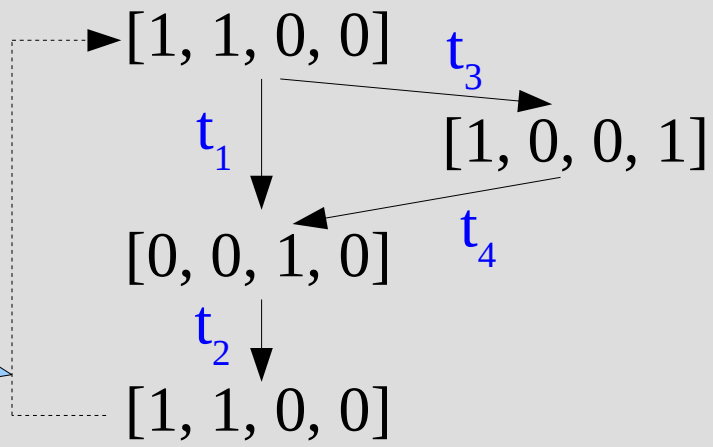
Nos slides seguintes iremos vez **se** e **como** é que estas perguntas podem ser respondidas no contexto das redes de Petri.

# A árvore de cobertura (*coverability tree*)

- Informalmente define-se a **árvore de cobertura** como uma árvore em que os **arcos** representam **transições** e os **nós** denotam o conjunto de **estados** que podem ser atingidos por uma sequência de transições.

  A raiz da árvore é o estado correspondente à marcação inicial da árvore.

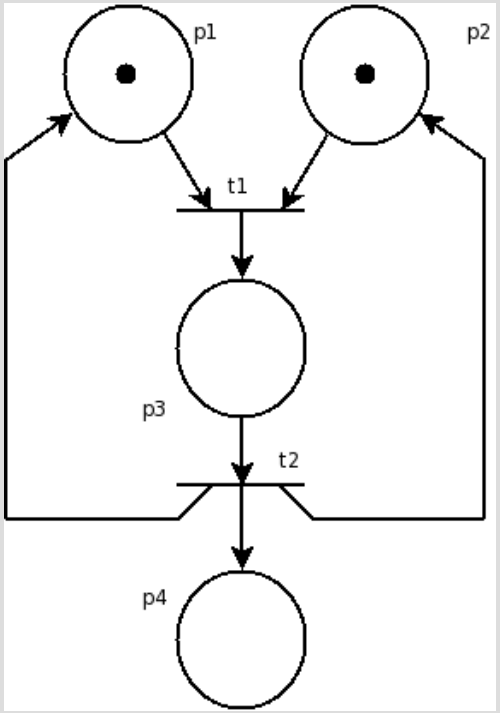


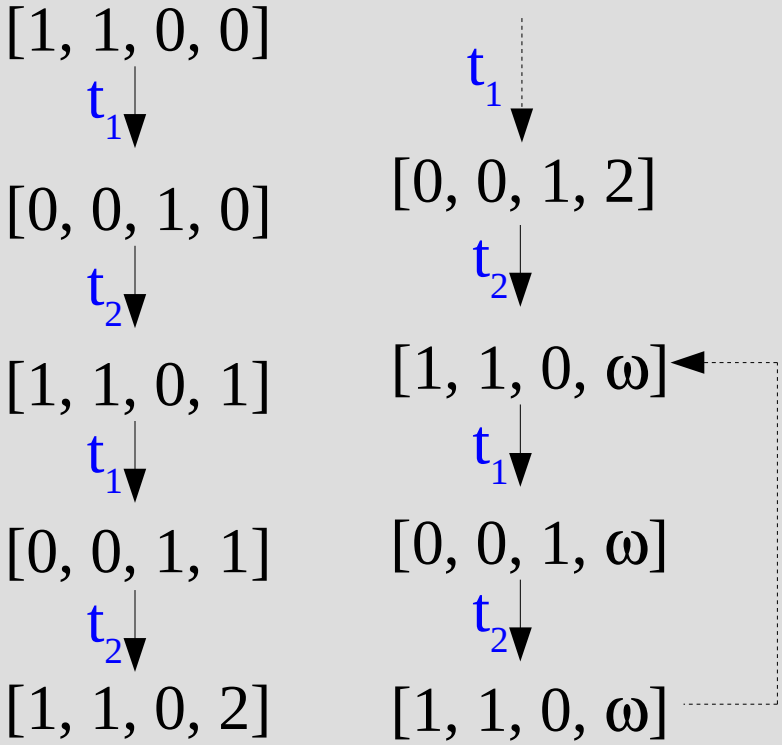




Espaço de estados finito;
A árvore contem todos os estados e respectivas transições

# A árvore de cobertura (*coverability tree*)

- **Nem sempre** as redes de Petri apresentam espaço de estados **finito**.
  - Árvore de cobertura de PN com espaço de estados **infinito**
  - O símbolo ω representa um **número ilimitado de *tokens***



# A árvore de cobertura: Definição Formal (*coverability tree*)

**Def.** Seja a rede de Petri $N=(P,T,A,w,\underline{x}_0)$,

- A **árvore de cobertura** é uma árvore em que os **ramos** denotam **transições** $t \in T$ e os **nós** representam **estados ω-estendidos** da rede de Petri.

- Um **estado ω-estendido** $\underline{x}$ consiste num vector de marcação $\underline{x} \in (\mathbb{N}^{|n|} \times \omega)^{|P|}$ o qual representa **todos** os estados da rede que podem ser **derivados** substituindo **ω por um número natural $n \in \mathbb{N}$**.

# A árvore de cobertura: Definição Formal (*coverability tree*)

**Def.** (cont.)

- Diz-se que um certo estado **x cobre o estado y** se:
  $\forall p \in P : x(p)=\omega$ ou $\{x(p)\neq \omega$ e $x(p)\geq y(p)\}$

- A **nó terminal** é um estado ω-estendido em que no qual **não há transições permitidas**

- A **nó duplicado** é um estado ω-estendido que **já existe** algures na árvore de cobertura

# Árvore de cobertura: algorítmo de construção

## Algorítmo Karp-Miller

1. Label initial marking M0 as the root of the tree and tag it as new
2. While new markings exist do:
   - select a new marking M
   - if M is identical to a marking on the path from the root to M, then tag M as old and go to another new marking
   - if no transitions are enabled at M, tag M dead-end
   - while there exist enabled transitions at M do:
     - obtain the marking M' that results from firing t at M
     - on the path from the root to M if there exists a marking M'' such that M'(p)>=M''(p) for each place p and M' is different from M'', then replace M'(p) by ω for each p such that M'(p) >M''(p)
     - introduce M' as a node, draw an arc with label t from M to M' and tag M' as new.

# Análise de redes de Petri

A árvore de cobertura permite responder a diversas das questões formuladas inicialmente!

**Limitação e segurança** (*boundeness*, *safeness*)

- Os lugares representam vulgarmente recursos físicos como *buffers*, filas, etc. Se na árvore de cobertura existe pelo menos **um estado** em que o símbolo **ω** aparece então a rede é **não limitada**.
- Se o lugar corresponder fisicamente a um certo recurso físico limitado o sistema **não é seguro** pois o recurso em causa pode ser **esgotado**!

# Análise de redes de Petri

## **Conservação** (*conservation*)

Em muitos sistemas é necessário verificar a propriedade da **conservação**, i.e., se o número de *tokens* se mantém constante. E.g. se os tokens representarem impressoras, é importante verificar que, após a submissão de trabalhos as impressoras são libertadas.

- Uma rede de Petri é **conservativa em sentido estrito** se para todos os estados alcançáveis o número de tokens é constante

$$\sum_{p \in P} y(p) = \sum_{p \in P} x_0(p)$$

- Esta propriedade pode ser tomada também em **sentido lato**, quando apenas um conjunto de lugares contribuem para a propriedade da conservação. Neste caso a equação acima aplica-se apenas a esse conjunto.

# Análise de redes de Petri

## Cobertura (*coverability*)

A simples inspecção visual da árvore de cobertura permite determinar a cobertura. Há algoritmos eficientes para cálculo de sequência de transições mais curta que leva a um estado que cobre outro

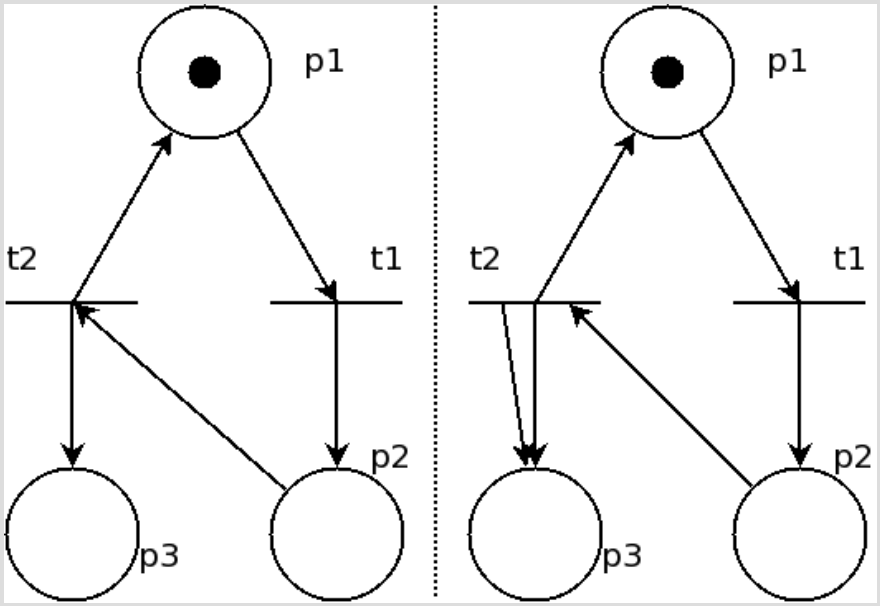
- Nota: diz-se que um estado $\underline{x}$ cobre um estado $\underline{y}$ se pelo menos todas as transições permitidas em $\underline{y}$ o são também em $\underline{x}$, ou seja:
  - $\forall\, p \in P\ x(p) \geq y(p)$

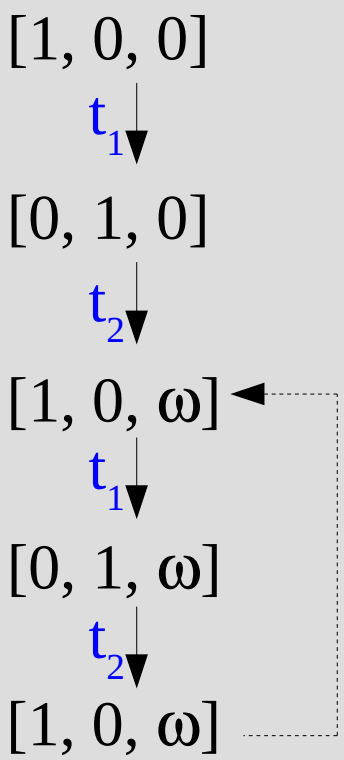
## Limitações

No caso geral a árvore de cobertura **não permite determinar o conjunto de estados alcançáveis**, o que acaba por limitar a efectividade desta ferramenta na detecção de *deadlocks*, *liveness*, etc.

# Limitações (cont)

Considere-se as seguintes redes de Petri:



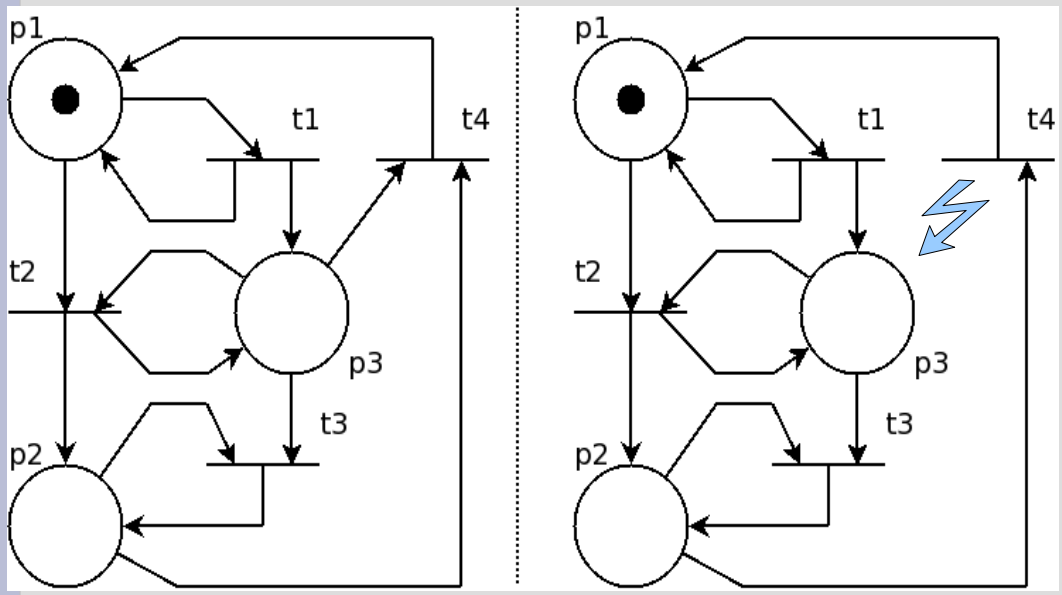



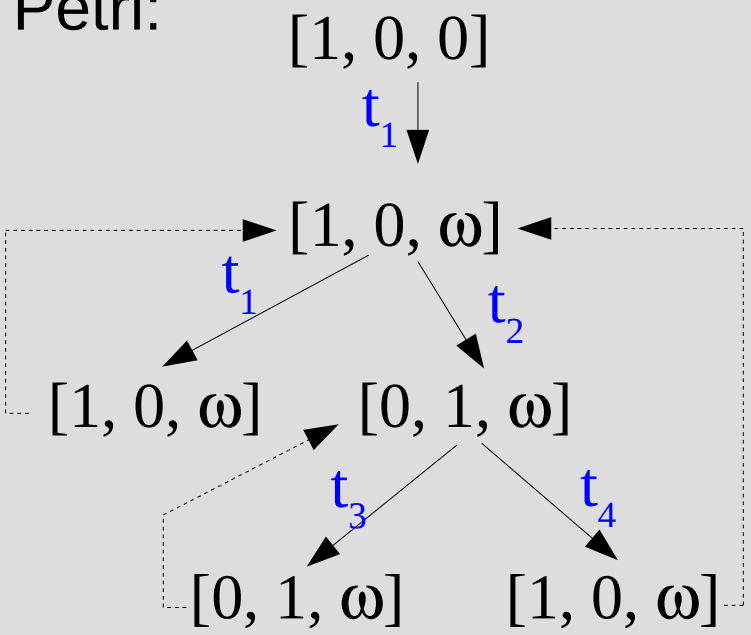

- Duas redes diferentes que têm **a mesma árvore de cobertura**
  - Na árvore à **esquerda** p3 pode ter qualquer número **inteiro** de tokens
  - Na árvore à **direita** p3 tem sempre um **número par** de tokens

# Análise de redes de Petri

## Limitações (cont)

Considere-se as seguintes redes de Petri:




Duas redes diferentes que têm **a mesma árvore de cobertura**

- A árvore à **esquerda** pode entrar em deadlock (e.g. t1,t2,t3)
- Na árvore à **direita** não há deadlocks

## Limitações (cont)

Apesar destas limitações, a árvore de cobertura permite **resolver** muitas situações práticas, e.g.:

- Se um estado **sem ω** aparece na árvore de cobertura então é **alcançável**
- Se um estado **não aparece** na árvore de cobertura então **não é alcançável**

- Assim, os redes de Petri permitem, em **muitas situações práticas** responder a problemas de alcançabilidade, *livenesse* e *deadlock*!

# Subclasses de redes de Petri

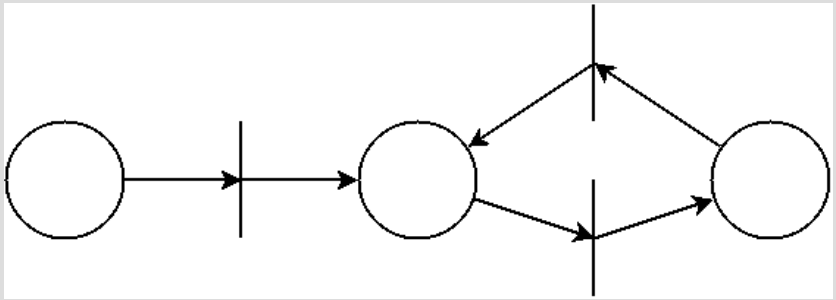
Introduzindo algumas restrições pode **aumentar-se a capacidade de análise** efectiva das redes de Petri à custa de uma **redução** da sua **expressividade**

- Subclasses de rede de Petri:
  - **Máquina de Estados**
  - **Grafos Marcados** (*Marked graphs*)

# Subclasses de redes de Petri

## Máquina de Estados

- Cada **transição** tem no máximo **um antecessor** e **um sucessor**
  - Apenas modela **causalidade** e **conflito**
  - **Não** modela **concorrência** nem **sincronização** de actividades paralelas

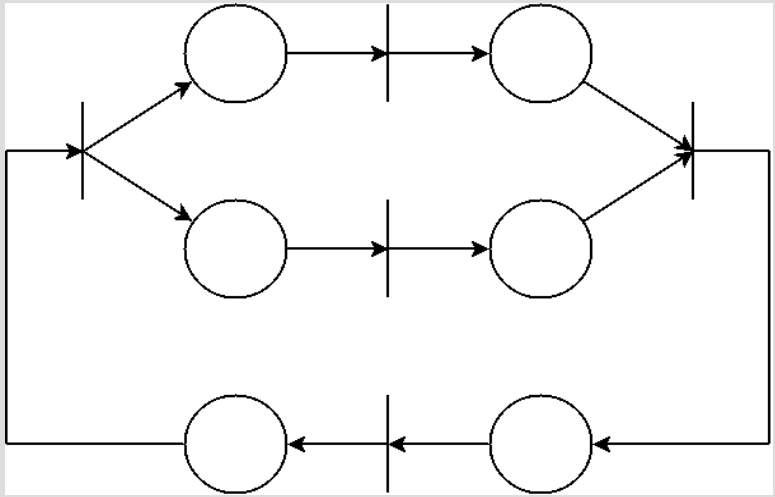


- O espaço de estado é finito
- Conservativas em sentido estrito

# Subclasses de redes de Petri

## Grafos marcados

- Cada **lugar** tem no no máximo **um antecessor** e **um sucessor**
  - Modela **concorrência**
  - **Não** modela **causalidade** nem **conflito**

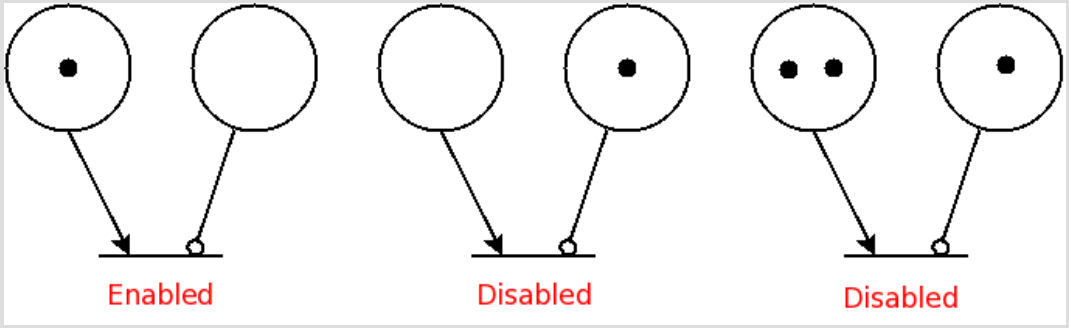


- Modelo equivalente ao SDF

# Extensões às redes de Petri

Existem também **extensões** às redes de Petri que permitem **aumentar** a sua **expressividade**

- **Arcos inibidores**
  - Um arco inibidor **modifica** a regra de **disparo**, por forma a que uma transição é permitida apenas quando **existem** *tokens* em todos os seus **lugares** de entrada **normais** e **não há *tokens*** nos **lugares** ligados por **ramos inibidores.**



# Extensões às redes de Petri

- **Timed Petri Nets**

  Noção de **tempo** pode ser associada a **lugares**, **transições** ou mesmo **arcos**

  - **Tempo associado a lugares**
    - Um *token* **chega** a um lugar num instante ***t*** e apenas fica **disponível** para transições de saída **após** um tempo ***t+d***. *(*tempo ***d*** específico a cada lugar*)*
  - **Tempo associado a transições**
    - Cada **transição** tem associados **dois valores** $\tau_1$ e $\tau_2$. Uma transição apenas pode disparar se estiver ***enabled*** **durante** $\tau_1$ e tem de disparar antes do tempo $\tau_2$ ter **decorrido** (define **janela** de disparo)

# Extensões às redes de Petri

- **Timed Petri Nets (cont.)**
  - **Tempo associado a arcos**
    - Um **arco** temporal que liga um lugar “p” a uma transição “t” tem **associado** um **intervalo** $[d_1, d_2]$.
    - Quando um *token* **chega** a “p” no instante $\tau$ o arco **contribui** para o **disparo** da transição “t” apenas durante o **intervalo** $[\tau+d_1, \tau+d_2]$.
    - Se o token **não** for **consumido** nesse intervalo **não** poderá mais ser consumido por essa transição.

**Nota: há muitas outras variantes de Timed Petri Nets.**

# Extensões às redes de Petri

- **Redes de Petri Coloridas**
  - Cada **token** tem associada um **tipo** ou **cor**
  - Os **lugares** são associados a **tipos**, os quais **restringem** o **tipo** de *tokens* que podem **receber**
  - Quando uma transição **dispara** os *tokens* consumidos são **transformados** em *tokens* eventualmente de **outros tipos/cores**
  - **Tipo de rede de Petri muito usado na actualidade!!!**

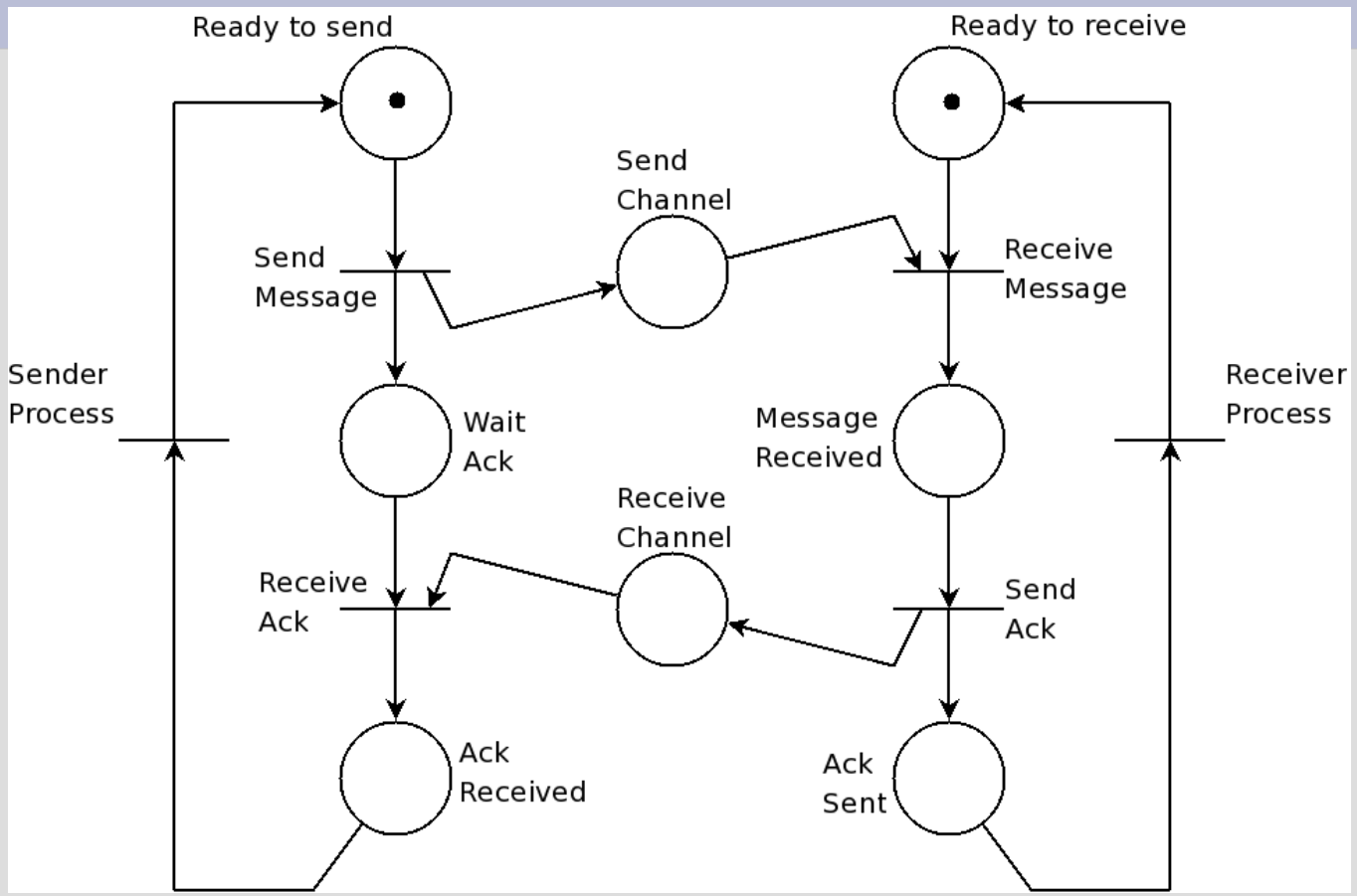
**Muitas outras extensões foram desenvolvidas**

# Exercício

**Exercício**: modelar, por meio de uma rede de Petri, a operação de um protocolo de comunicação do tipo “Send/Wait”

- Dois processos, um **produtor** e outro **consumidor**
- Processo **produtor envia** uma mensagem e tem de **aguardar** por um *acknowledge*. Após receber o *acknowledge* pode efectuar processamento e posteriormente enviará uma nova mensagem
- Processo **consumidor aguarda** que uma mensagem chegue e, quando tal acontece, **envia** um *acknowledge*, processa a mensagem e fica pronto a receber uma nova mensagem

# Exercício




- Calcular a árvore de cobertura
- Modificar para o caso de perda de mensagens
  - Usar *Timed Petri Nets* para especificar *timeouts*

# Alguns links ...

- Existem imensos recursos na Internet sobre Petri Nets, versando conceitos básicos, extensões, subclasses, ferramentas de análise e simulação, etc.

- Um excelente repositório de informação encontra-se em:
  **http://www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/PetriNets/**

- Este site inclui também um excelente levantamento de ferramentas de simulação:
  **http://www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/PetriNets/tools/quick.html**

# Sumário

- **Conceitos básicos**
  - Definição
  - Função de transição
  - Conjunto de alcançabilidade
  - Modelação de I/O
  - Templates
- **Análise**
  - Matriz de incidência
  - Árvore de cobertura
- **Subclasses**
  - Máquinas de Estados
  - Grafos Marcados
- **Extensões**
  - Arcos inibidores
  - Timed Petri Nets
  - PN coloridas